Q1) Définition de la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4^-$.

Pour tout voisinage J de 4^- , il existe un voisinage I de $-\infty$, tel que,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

pour tout intervalle $J =]4-\epsilon\,;4[$ avec $\epsilon > 0$, il existe un intervalle $I =]-\infty\,;b[$ avec b réel, tel que ,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad / \quad x \in]-\infty\,;b[\quad \Rightarrow \quad f(x) \in]4-\epsilon\,;4[$$

Autrement dit,

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{*+} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad / \quad x < b \quad \Rightarrow \quad 4-\epsilon < f(x) < 4 \,.$$

Q2) Définition de la limite $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Pour tout voisinage J de $+\infty$, il existe un voisinage I de 2^-, tel que,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

pour tout intervalle $J =]b;+\infty[$ avec b réel, il existe un intervalle $I =]2-\eta;2[$ avec $\eta > 0$ réel, tel que ,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+} \quad / \quad x \in]2-\eta;2[\quad \Rightarrow \quad f(x) \in]b;+\infty[$.

Autrement dit,

$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists \eta \in \mathbb{R}^{*+} \quad / \quad 2-\eta < x < 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) > b$.

Q3) Définition de la limite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Pour tout voisinage J de $-\infty$, il existe un voisinage I de $+\infty$, tel que,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

pour tout intervalle $J =]-\infty ; b[$ avec b réel, il existe un intervalle $I =]a ; +\infty[$ avec a réel, tel que ,

si x appartient à I alors $f(x)$ appartient à J .

Autrement dit,

$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad / \quad x \in]a ; +\infty[\quad \Rightarrow \quad f(x) \in]-\infty ; b[$.

Autrement dit,

$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad / \quad x > a \quad \Rightarrow \quad f(x) < b$.